

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: AK Modell mit physischem Kapital und Humankapital

Im Modell ist folgende aggregierte Produktionsfunktion gegeben:

$$Y(t) = F(K(t), H(t)).$$

Der Output, $Y(t)$, ist also eine Funktion der Einsatzfaktoren physisches Kapital, $K(t)$, und Humankapital, $H(t)$. Die Akkumulationsgleichung für die individuellen Vermögenswerte des Haushaltes lautet

$$\dot{a}(t) = r(t)a(t) + w(t)h(t) - c(t) - i_h(t)$$

und die Entwicklung des individuellen Humankapitals folgt der Gleichung

$$\dot{h}(t) = i_h(t) - \delta h(t).$$

$i_h(t)$ ist das Investment in Humankapital.

Nehmen Sie in dieser Aufgabe an, dass – im Unterschied zur Vorlesung – die Abschreibungs-raten für das physische Kapital und das Humankapital identisch sind ($\delta_k = \delta_h = \delta$) sowie dass die Größe der Bevölkerung konstant ist ($n = 0$).

- a) Stellen Sie das dynamische Optimierungsproblem dieses Haushaltes inklusive geeigneter Nebenbedingungen auf, wenn die Präferenzen des Haushaltes abgebildet werden durch den Ausdruck

$$U(0) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \quad \text{mit } \theta \neq 1 \text{ und } \theta \geq 0.$$

- b) Wie lauten die Kontrollvariablen, die Zustandsvariablen und Ko-Zustandsvariablen in diesem Problem?
- c) Leiten Sie die Keynes-Ramsey-Regel mit den Methoden der optimalen Steuerungstheorie her.

- d) Zeigen Sie, dass im Optimum folgende Bedingung gilt

$$r(t) = w(t) - \delta$$

und erläutern Sie kurz die ökonomische Intuition dieser Bedingung.

Aufgabe 2: Wachstum mit Externalitäten — Wirtschaftspolitische Maßnahmen

Das hier behandelte Wachstumsmodell mit Externalitäten des Kapitals (“learning-by-doing”) ist identisch zu jenem, welches in der Vorlesung behandelt wurde.

- a) Leiten Sie die Wachstumsrate des Konsums für den sozialen Planner her und zeigen Sie, dass die Wachstumsrate in diesem Fall größer ist als im dezentralen Gleichgewicht. Geben Sie eine kurze ökonomische Erklärung für dieses Ergebnis.
- b) Zeigen Sie, dass durch geeignete wirtschaftspolitische Maßnahmen wie einer Subvention für Investitionen in Kapital, s_K , oder einer Subvention für die Produktion, s_Y , auch in einer dezentralen Volkswirtschaft das sozial optimale Gleichgewicht erreicht werden kann. Nehmen Sie bei Ihren Analysen an, dass die Subventionen durch eine pauschale Steuer auf den Konsum der Haushalte, τ , finanziert werden, so dass der Staatshaushalt ausgeglichen ist.
- c) Wie hoch muss die Subvention für die Produktion sein, damit die dezentrale Lösung mit der des sozialen Planners identisch ist, für den Fall, dass die Produktionsfunktion durch

$$Y_i(t) = BK_i^\alpha(t)(K(t)L_i)^{1-\alpha}$$

gegeben ist?